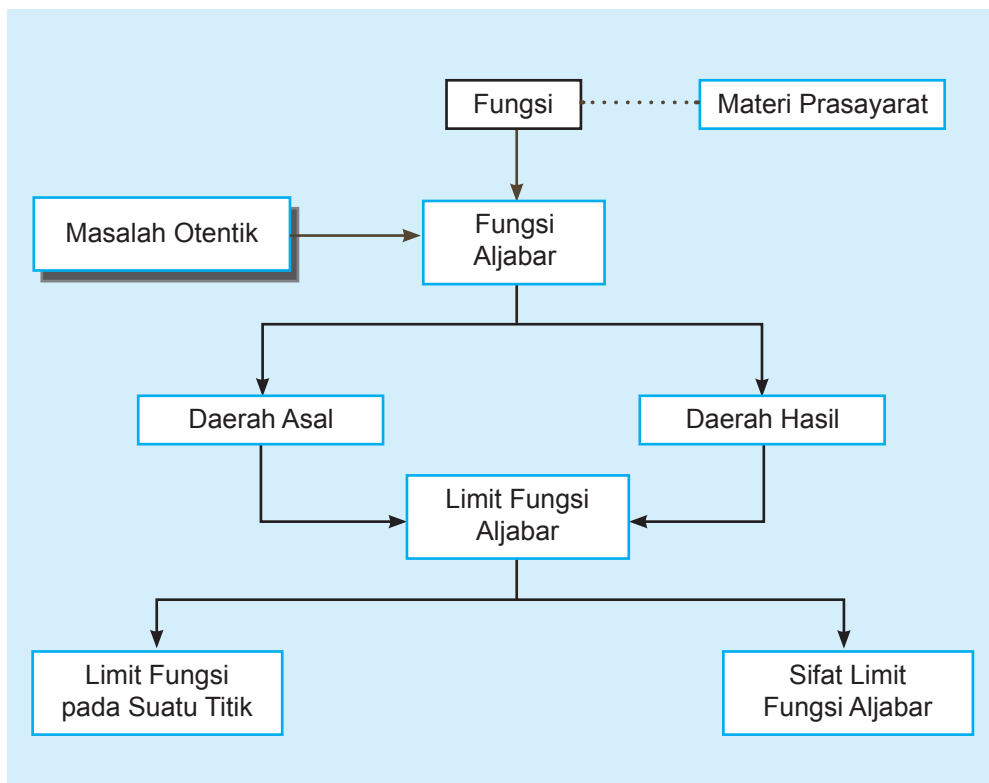
Limit Fungsi

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. memahami konsep limit fungsi aljabar dengan menggunakan konteks nyata dan menerapkannya; 4. merumuskan aturan dan sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan contoh-contoh; 5. memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang limit fungsi aljabar.	Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mampu berpikir kreatif; • mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan; • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep; • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan; • mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari; • siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- *Limit fungsi*
- *Pendekatan (kiri dan kanan)*
- *Bentuk tentu dan tak tentu*
- *Perkalian sekawan*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisa data dan menarik kesimpulan. Perhatikan dan amatilah contoh ilustrasi berikut.

Ilustrasi

Gambar 10.1 Jalan Tol

Seorang Satpam berdiri mengawasi mobil yang masuk pada sebuah jalan tol. Ia berdiri sambil memandang mobil yang melintas masuk jalan tersebut. Kemudian dia memandang terus mobil sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut.

- ♦ Coba kamu lihat Gambar: 10.1. Kita melihat bahwa bukan hanya ukuran mobil di kejauhan yang seakan-akan semakin kecil, tetapi lebar jalan raya tersebut juga seakan-akan semakin sempit. Kemudian coba kamu analisis kembali gambar tersebut, secara visual, apakah perbandingan ukuran lebar jalan dengan ukuran mobil tersebut tetap? Berikan komentarmu!

Jika kita analisis lebih lanjut, untuk pendekatan berapa meterkah jauhnya mobil melintas agar penjaga pintu masuk jalan tol sudah tidak dapat melihatnya lagi? Berdiskusilah dengan teman-temanmu!

1. Menemukan Konsep Limit Fungsi

Kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep pendekatan suatu titik ke titik yang lain dengan mengamati dan memecahkan masalah.

Masalah-10.1

Perhatikan masalah berikut.

Gambar 10.2 Lebah

Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah pada sebuah lapangan. Pada suatu saat, lebah tersebut diamati terbang membentuk sebuah lintasan parabola. Setelah terbang selama 1 menit, lebah tersebut telah mencapai ketinggian maksimum sehingga ia terbang datar setinggi 5 meter selama 1 menit.

Pada menit berikutnya, lebah tersebut terbang menukik lurus ke tanah sampai mendarat kembali pada akhir menit ketiga.

- Coba kamu modelkan fungsi lintasan lebah tersebut!

  Petunjuk:
  - Model umum kurva parabola adalah $f(t) = at^2 + bt + c$, dengan a, b, c bilangan real.
  - Model umum kurva linear adalah $f(t) = mt + n$ dengan m, n bilangan real.

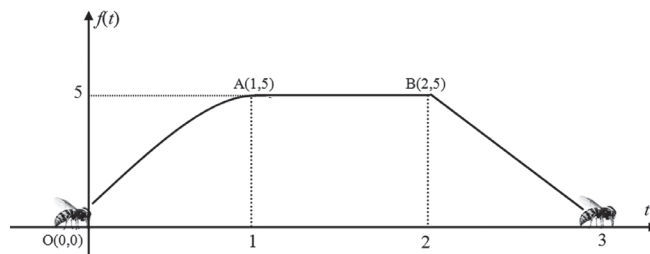
- Amatilah model yang kamu peroleh. Tunjukkanlah pola lintasan terbang lebah tersebut?

  Petunjuk:

  Pilihlah strategi numerik untuk menunjukkan pendekatan, kemudian bandingkan kembali jawaban kamu dengan strategi yang lain.

- Cobalah kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar dari ilustrasi Masalah 10.2

Gambar 10.3 Ilustrasi gerakan lebah

Jadi, model fungsi lintasan lebah tersebut berdasarkan gambar di atas adalah:

$$f(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{jika} \quad 0 \le t \le 1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1 \le t \le 2 \\ mt + n & \text{jika} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad \text{.............................. (1)}$$

dengan a, b, c, m, n bilangan real.
Dari ilustrasi, diperoleh data sebagai berikut.

- Misalkan posisi awal lebah pada saat hinggap di tanah adalah posisi pada waktu $t = 0$ dengan ketinggian 0, disebut titik awal $O(0,0)$,
- Kemudian lebah terbang mencapai ketinggian maksimum 5 meter pada waktu $t = 1$ sampai $t = 2$, di titik $A(1,5)$ dan $B(2,5)$.
- Pada akhir waktu $t = 2$, lebah kembali terbang menukik sampai hinggap kembali di tanah dengan ketinggian 0, di titik $C(3,0)$.

Berdasarkan data tersebut, kita akan menentukan fungsi lintasan lebah, dengan langkah-langkah berikut.

1. Substitusi titik $O(0,0)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $c = 0$.
2. Substitusi titik $A(1,5)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $a + b + c = 5$, karena $c = 0$, maka $a + b = 5$.
3. Karena fungsi kuadrat mencapai maksimum pada saat $t = 1$ maka $\frac{-b}{2a} = 1$ atau $b = -2a$.
4. Dengan mensubstitusi $b = -2a$ ke $a + b = 5$ maka diperoleh $a = -5$ dan $b = 10$.
5. Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah $f(t) = -5t^2 + 10t$.
6. Lebah tersebut terbang konstan pada ketinggian 5 maka fungsi lintasan tersebut adalah $f(t) = 5$.
7. Substitusi titik $B(2,5)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $5 = 2m + n$.
8. Substitusi titik $C(3,0)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $0 = 3m + n$ atau $n = 3m$.
9. Dengan mensubstitusi ke $n = -3m$ maka diperoleh $m = -5$ dan $n = 15$.
10. Fungsi linear yang dimaksud adalah $f(t) = -5t + 15$.

Dengan demikian, model fungsi lintasan lebah tersebut adalah:

$$f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & \text{jika} \quad 0 \le t \le 1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1 \le t \le 2 \\ -5t + 15 & \text{jika} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad \text{.................................... (2)}$$

Selanjutnya limit fungsi pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 10.1 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	5	5	5	5	5	5

Tabel 10.2 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
$f(t)$	5	5	5	5	5	5	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Dari pengamatan pada tabel, dapat kita lihat bahwa y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 2.

Perhatikan strategi lainnya. Mari perhatikan nilai fungsi pada t mendekati 1 dari kiri dan kanan, sebagai berikut:

I. Untuk t mendekati 1

$\lim\limits_{t\to 1^-} -5t+15 = 5$ (makna $t \to 1^-$ adalah nilai t yang didekati dari kiri)

$\lim\limits_{t\to 1^+} 5 = 5$ (makna $t \to 1^+$ adalah nilai t yang didekati dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 1 dari kiri , nilai fungsi $y = f(t) = -5t^2 + 10t$ mendekati 5. Demikian saat t mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Kita menulisnya $\lim\limits_{t\to 1^-} -5t^2+10t = 5 = \lim\limits_{t\to 1^+} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1.

II. Untuk t mendekati 2

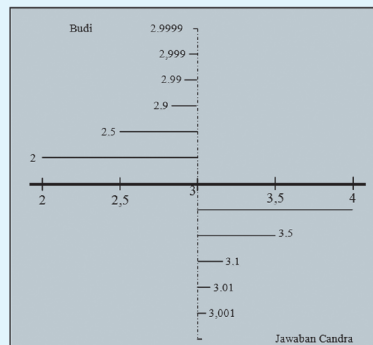
$\lim\limits_{t\to 2^-} 5 = 5$ (makna $t \to 2^-$ adalah nilai t yang didekati dari kiri)

$\lim\limits_{t\to 2^+} -5t+15 = 5$ (makna $t \to 2^+$ adalah nilai t yang didekati dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Demikian juga saat t mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi $y = f(t) = -5t + 15$ mendekati 5. Hal ini dapat dinyatakan $\lim\limits_{t\to 2^+} 5 = \lim\limits_{t\to 2^-} -5t^2+10t = 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2.

Masalah-10.2

Tiga anak (sebut nama mereka: Ani, Budi dan Candra) sedang bermain tebak angka. Ani memberikan pertanyaan dan kedua temannya akan berlomba memberikan jawaban yang terbaik. Perhatikanlah percakapan mereka berikut.

Ani : **Sebutkanlah bilangan real yang paling dekat ke 3?**
Budi : 2
Candra : 4
Budi : 2,5
Candra : 3,5
Budi : 2,9
Candra : 3,1
Budi : 2,99
Candra : 3,01
Budi : 2,999
Candra : 3,001
Budi : 2,9999
Candra : 3,0001

Gambar 10.4 Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Alternatif Penyelesaian

Kedua teman Ani berlomba memberikan jawaban bilangan terdekat ke 3, seperti pada Gambar 10.4. Pada awalnya Budi dan Candra mengambil bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan sehingga mereka menjawab 2 dan 4. Ternyata masih ada bilangan real lain yang terdekat ke 3, sehingga Budi harus memberi bilangan yang lebih dekat lagi ke 3 dari kiri, maka Budi menyebut 2,5. Hal ini membuat Candra ikut bersaing untuk mencari bilangan lain, sehingga ia menjawab 3,5. Demikianlah mereka terus-menerus memberikan jawaban sebanyak mungkin sampai akhirnya mereka menyerah untuk mendapatkan bilangan-bilangan terdekat ke-3.

Berdasarkan pemahaman kasus ini, ternyata ketidakmampuan teman-teman Ani untuk menyebutkan semua bilangan tersebut telah membuktikan bahwa begitu banyak bilangan real di antara bilangan real lainnya. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan jawaban-jawaban Budi dan Candra maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 (secara matematika, dituliskan $x \to 3$).

Masalah-10.3

(A)

(B)

(C)

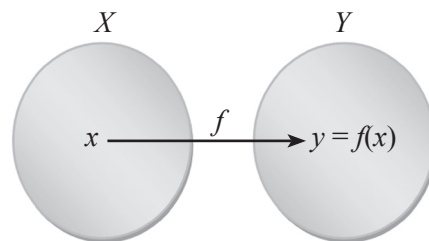
Gambar 10.5 Jembatan layang

Kata limit dapat dipandang sebagai nilai batas. Perhatikan ilustrasi berikut. Sebuah jembatan layang dibangun pada sebuah kota untuk mengatasi masalah kemacetan jalan raya. Setelah pondasi yang kokoh dibangun (Gambar 10.5 A), beberapa badan jembatan yang telah dibentuk dengan ukuran tertentu diangkat dan disambungkan satu sama lain pada setiap pondasi yang telah tersedia (Gambar 10.5 B) sehingga terbentuk sebuah jembatan layang yang panjang (Gambar 10.5 C). Tentu saja kedua blok badan jembatan yang terhubung mempunyai garis pemisah (Gambar 10.5 B).

Jika setiap pondasi merupakan titik-titik pada himpunan X dan badan jembatan merupakan kurva yang dipenuhi oleh fungsi $y = f(x)$ maka hubungan antara pondasi dan badan jembatan merupakan sebuah pemetaan atau fungsi.

Ingat kembali pengertian sebuah fungsi pada bab sebelumnya. Misalkan X dan Y ada-lah himpunan yang tidak kosong, $x \in X$, $y \in Y$, sebuah fungsi f memetakan setiap anggota himpunan X ke tepat satu anggota himpunan Y.

Gambar 10.6 Pemetaan

Pilih salah satu pondasi sebagai titik yang akan didekati. Lihat pada Gambar 10.5 B. Kita anggap garis pemisah pada persambungan kedua blok badan jembatan sebagai ilustrasi $x \neq c$.

Diskusi

Menurut kamu, apakah kedua blok badan jembatan tersebut mempunyai limit pada garis persambungan tersebut? Berikanlah komentar kamu! Diskusikanlah komentar kamu tersebut dengan teman kelompok dan gurumu!

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, kita tetapkan pengertian limit fungsi, sebagai berikut.

Definisi 10.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L dan c bilangan real.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L.

Kita menyatakan bahwa f mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Seperti yang telah dijelaskan di awal bab ini, sebuah pengamatan pada permasalahan akan melahirkan pengertian dan konsep umum. Tetapi ada baiknya kita harus menguji kembali konsep tersebut. Mari kita amati kembali konsep limit fungsi tersebut dengan mengambil strategi numerik, dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukanlah titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Hitung nilai $f(x)$ untuk setiap nilai x yang diberikan?
3. Kemudian amatilah nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.
4. Ada atau tidakkah suatu nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati c tersebut?

Contoh 10.1

Misalkan fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita menentukan x mendekati 2, kemudian kita tentukan nilai y oleh fungsi $y = f(x)$ pada tabel berikut. Kemudian amatilah tabel berikut.

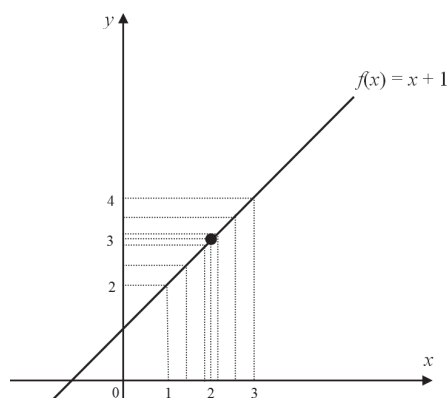
Tabel 10.3 Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2

x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	…	?	…	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

Apakah pengamatanmu? Perhatikanlah tabel tersebut. Kita dapat memberikan beberapa pengamatan sebagai berikut.

- Ada banyak bilangan real yang dapat ditentukan yang mendekati 2.
- Setiap titik x mempunyai peta di y oleh fungsi yang diberikan.
- Setiap peta x juga mendekati peta 2.
- Tampak bahwa pendekatan ada dari kiri dan kanan tabel.

Menurut kamu, apa yang terjadi jika y hanya mendekati dari sebelah kiri atau kanan saja? Apakah ada fungsi yang demikian

Perhatikan sketsa berikut:

Gambar 10.7 Grafik Fungsi $f(x) = x + 1$

Secara matematika, fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

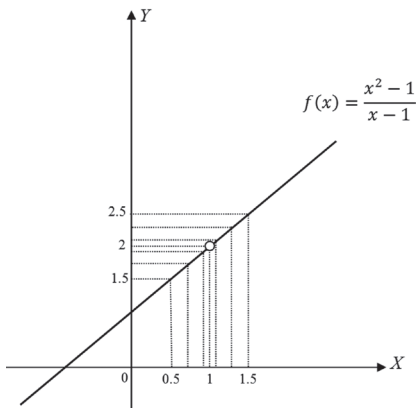
Bagaimanakah jika $f(x)$ tidak terdefinisi pada titik $x + 1$? Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 10.2

Jika fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \in R$, $x \neq 1$. Misal $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$ untuk $x \neq 1$. Nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x yang mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.4 Nilai fungsi $y = f(x)$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…	?	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan nilai tabel di atas, dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.

Gambar 10.8 Grafik fungsi *f*(*x*)

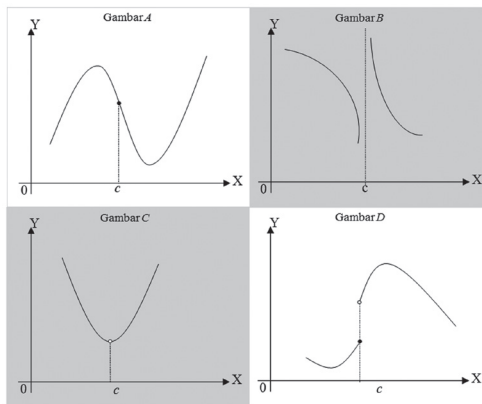
Diskusi

Perhatikanlah gambar di samping!
Coba diskusikan kembali dengan temanmu, apa maksud dari gambar bulatan kosong pada kurva fungsi pada saat $x = 1$?

Secara matematika, fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ dengan $x \neq 1$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Diskusi

Coba kamu diskusikan kasus berikut!
Ajaklah temanmu memperhatikan dan mengamati beberapa gambar berikut! Gambar manakah yang menunjukkan bentuk fungsi yang mempunyai limit pada saat *x* mendekati *c*? Jelaskanlah jawabanmu?

Gambar 10.9 Grafik fungsi *f*(*x*) terkait limit

Contoh 10.3

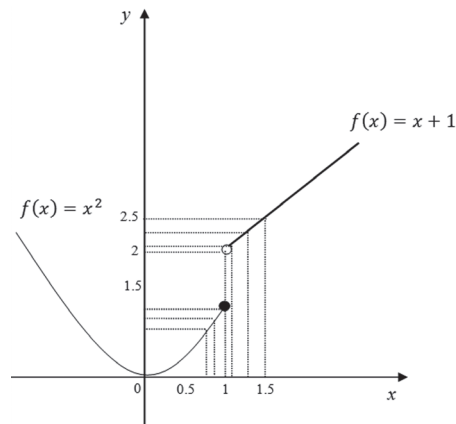
Perhatikan fungsi berikut:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$$

Jika $y = f(x)$ maka nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.5 Nilai fungsi $y = f(x)$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan tabel di atas, $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Hal ini mengakibatkan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.

Gambar 10.10 Grafik fungsi $f(x)$

Dengan demikian fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$ tidak memiliki limit di titik $x = 1$.

- Menurut kamu, mengapa fungsi di atas tidak memiliki limit di $x = 1$? Dapatkah kamu berikan contoh lain untuk fungsi yang tidak memiliki limit di titik tertentu?

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Perhatikan kembali beberapa contoh berikut. Kita akan mencoba mengamati sifat-sifat limit fungsi pada beberapa contoh dan tabel nilai-nilainya.

Contoh 10.4

Jika $f(x) = 2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai-nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.6 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 2, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	2	2	2	2	2	2	...	?	...	2	2	2	2	2	2

Apa yang kamu peroleh dari Tabel 10.6?

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat kita tuliskan secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \to 1^-} 2 = 2 = \lim_{x \to 1^+} 2 \quad \text{...(1)}$$

Contoh 10.5

Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.7 Nilai pendekatan *f*(*x*) = *x*, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Kita dapat mengamati pergerakan nilai-nilai x dan $f(x)$ pada tabel tersebut. Perhatikanlah, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2 dari kiri dan kanan. Hal ini dapat ditulis secara matematika, dengan,

$$\lim_{x \to 1^-} x = 1 = \lim_{x \to 1^+} x \quad \text{...(2)}$$

- Dapatkah kamu menunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar?

Berdasarkan (1) dan (2) secara induktif diperoleh sifat berikut.

Sifat-1

Misalkan f suatu fungsi dengan $f : R \to R$ dan L, c bilangan real.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Contoh 10.6

Jika $f(x) = x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.8 Nilai pendekatan *f*(*x*) = *x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,04	0,25	0,81	0,98	0,99	...	?	...	2,00	2,02	1,21	2,25	3,23	4

Nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 adalah 1.

Berdasarkan Tabel 10.8, $\lim_{x \to 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} x^2 &= \lim_{x \to 1} x \text{ x } x \\
&= \lim_{x \to 1} x \text{ x } \lim_{x \to 1} x \\
&= 1 \times 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Contoh 10.7

Jika $f(x) = 2x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.9 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 2*x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,08	0,5	1,62	1,96	1,99	...	?	...	2,00	2,04	2,42	2	2	2

Berdasarkan Tabel 10.9, $\lim_{x \to 1} x = 1$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} 2x^2 &= \lim_{x \to 1} 2 \text{ x } x \text{ x } x \\
&= \lim_{x \to 1} 2 \text{ x } \lim_{x \to 1} x \text{ x } \lim_{x \to 1} x \\
&= 2 \times 1 \times 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Contoh 10.8

1. Jika $f(x) = 2x^2 + 2x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.10 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 + 2x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	1,5	3,42	3,99	4,00	...	?	...	4,00	4,06	4,62	7,5	12,0

Berdasarkan Contoh 10.7 dan Tabel 10.8 diperoleh $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$, maka

$$\lim_{x \to 1} 2x^2 + \lim_{x \to 1} 2x = \lim_{x \to 1} 2x^2 + \lim_{x \to 1} 2x$$
$$= 2 + 2$$
$$= 4$$

Contoh 10.9

Jika $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.11 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	–25	7,14	2,78	0,26	2,01	...	?	...	1,99	1,94	1,52	0,49	0,38

Berdasarkan tabel di atas, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{2x^2 - x} = 2$ atau

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{2x^2 - x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} 2}{\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 - x}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1} 2}{\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 - \lim\limits_{x \to 1} x}$$
$$= \frac{2}{2 - 1} = 2$$

Perhatikanlah sifat-sifat limit fungsi berikut:

Sifat-2

Misalkan f dan g adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]$
4. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] + \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
5. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] - \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
6. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$
7. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}\right]$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh 10.10

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$ (cm)^2. Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah ...

Penyelesaian

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 10.12 Nilai pendekatan pada saat *t* mendekati 5

t	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\Delta f/\Delta t$
1	–4	–8	2
2	–3	–6,75	2,25
3	–2	–5	2,5
4	–1	–2,75	2,75
4,5	–0,5	1,4375	2,875
4,9	–0,1	–0,2975	2,975
4,99	–0,01	–0,029975	2,9975
4,999	–0,001	–0,00299975	2,99975
4,9999	–0,0001	–0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,253,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian lainnya

$$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$$

$$f(5) = 0{,}25(5)^2 + 0{,}5(5) = 8{,}75$$

$$\lim_{t\to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5} \frac{(0{,}25t^2 + 0{,}5t) - f(5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}25t^2 + 0{,}5t - 8{,}75}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5} \frac{0{,}5(0{,}5t^2 + t - 17{,}5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0,5(0,5t + 3,5)(t - 5)}{t - 5}$$

$$= \lim_{t \to 5} 0,5(0,5t + 3,5)$$

$$= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5)$$

$$= 3$$

- Jika t diganti menjadi $t - 5$, maka dapatkah kamu menunjukkan kembali proses limit di atas?

3. Menentukan Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan limit secara numerik, memfaktorkan, dan perkalian sekawan. Coba kita pelajari permasalahan yang dihadapi oleh grup diskusi berikut.

Lina dan Wati adalah teman satu kelompok belajar di kelasnya. Suatu hari mereka mendapat tugas dari guru untuk menggambar beberapa grafik fungsi dengan mencari sebanyak mungkin titik-titik yang dilalui fungsi tersebut. Pada saat mereka menentukan beberapa nilai di daerah asalnya, mereka mendapatkan kesulitan untuk menentukan nilai di daerah hasilnya, sebagai berikut:

1. Untuk $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = -1$ karena jika disubstitusi nilai 1 atau -1 ke fungsi, nilai $f(1) = \frac{0}{0}$ dan $f(-1) = \frac{0}{0}$.
2. Untuk $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 0$ karena jika nilai 0 disubstitusi juga ke fungsi maka mereka memperoleh $f(0) = \infty - \infty$.

Menurut kamu, apakah penyebab permasalahan mereka?

Jika kita pelajari lebih teliti, Lina dan Wati sedang menghadapi permasalahan bentuk tak tentu suatu limit. Coba kita tampilkan kembali sifat suatu limit. Misalkan f suatu fungsi dengan $f : R \to R$ dan L, c bilangan real, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c^+} f(x)$.

Nilai L yang kita maksud adalah bentuk tentu limit. Jadi, jika kita substitusikan nilai c ke fungsi $f(x)$ sehingga $f(c)$ adalah bentuk-bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^∞, dan lain-lain maka bentuk tersebut gagal menjadi nilai limit fungsi tersebut. Oleh karena itu, misi kita dalam limit fungsi adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi, dengan pengamatan berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi sehingga diperoleh $f(c) = L$.
2. Jika L merupakan salah satu bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih strategi: mencari beberapa titik pendekatan (numerik), memfaktorkan, perkalian sekawan, dll.

   Ingat: $\sqrt{x} - a$ sekawan dengan $\sqrt{x} + a$,

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Contoh 10.11

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Cara I (Numerik)

Jika $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.13 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	...	?	...	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Dengan melihat tabel di atas, jika x mendekati 2, maka $y = f(x)$ akan mendekati 0,25.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)((x+2)}$ sehingga:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \text{ karena } x \neq 2$$

Dapatkah anda meneliti untuk mendapatkan metode yang lain untuk menyelesaikan permasalahan limit fungsi tesebut.

$$= \frac{1}{4}$$
$$= 0{,}25$$

Contoh 10.12

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.14 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ pada saat x mendekati –2

x	–2,3	–2,3	–2,1	–2,01	–2,001	...	–2	...	– 1,999	– 1,99	–1,9	–1,8	–1,7
y	2,594	–2,530	–2,501	–2,499	–2,5	...	?	...	–2,5	– 2,501	–2,528	2,599	– 2,763

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati –2 maka $y = f(x)$ akan mendekati –2,5

Cara II (Perkalian sekawan)

Perhatikan bahwa $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ dapat kita ubah dengan mengalikan bentuk sekawan dari $\left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}\right)$ sehingga:

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x^2 + x - 1) - (2x + 5)}{(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{(x + 2)\left(\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{2x + 5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)} \qquad \text{karena } x \neq -2$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$= -2,5$$

Contoh 10.13

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ dan $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$.

Jika $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$, maka $f(1) = \dfrac{0}{0}$, $f(-1) = \dfrac{0}{0}$. Karena kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut pada saat x mendekati 1 dan –1.

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 1 dan –1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.15 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	...	?	...	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 10.16 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ pada saat x mendekati –1

x	–1,3	–1,2	–1,1	–1,01	–1,001	...	–1	...	–0,999	–0,99	–0,9	–0,8	–0,7
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	...	?	...	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2 dan jika nilai x mendekati –1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ sehingga:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{(Karena } x \neq 1 \text{ dan } x+1 \neq 0\text{)}$$

$$= \lim_{x\to1} x^2+1$$

$$= \lim_{x\to1} 1^2+1$$

$$= 2$$

dan

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \quad \text{(Karena } x \neq 1 \text{ dan } x+1 \neq 0\text{)}$$

$$= \lim_{x\to-1} x^2+1$$

$$= \lim_{x\to-1} (-1)^2+1$$

$$= 2$$

Contoh 10.14

Tentukanlah $\lim_{x\to0}\frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 0 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.17 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ pada saat x mendekati 0

x	–0,3	–0,2	–0,1	–0,01	–0,001	...	0	...	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3
y	–0,08	–0,08	–0,07	–0,07	–0,06	...	?	...	–0,06	–0,06	–0,06	–0,05	–0,04

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x semakin mendekati 0 maka $y = f(x)$ akan semakin mendekati –0,06.

Cara II (Faktorisasi)

Fungsi $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ dapat kita ubah menjadi $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$ sehingga:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x+4}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right) \quad \text{(Sifat-10.2)}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x+4\right)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{16}$$

Uji Kompetensi 10.1

Pilihlah strategi pendekatan atau numerik untuk menentukan limit fungsi pada soal no. 1 sampai no. 5. Kemudian kamu pilih strategi lain dan membandingkan jawaban kamu dengan jawaban kamu pada strategi sebelumnya.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 2} = ...$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} = ...$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right) = ...$

   A. –2 D. 2
   B. $-\dfrac{1}{8}$ E. $\dfrac{1}{8}$
   C. 0

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = ...$

   A. –2 D. 1
   B. –1 E. 2
   C. 0

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x+3} - 2} = ...$

   A. –2 D. 2
   B. $-\dfrac{1}{8}$ E. $\dfrac{1}{8}$
   C. 0

Selesaikanlah permasalahan berikut.

6. Sketsalah dan analisislah limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{jika} \quad x > 1 \\ 2x + 1 & \text{jika} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{x+1} & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}$$

7. Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.
   a. Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!
   b. Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!
   c. Sketsalah permasalahan tersebut!

8. Tentukan limit fungsi berikut dengan menggunakan dua atau lebih metode penyelesaian! Bandingkan jawaban yang anda peroleh!

a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$

b. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{h}$

c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim_{h \to 0} \frac{f(x-4h) - f(x+2h)}{3h}$

9. Tentukanlah nilai limit fungsi $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4}}$ dengan menggunakan numerik dan perkalian sekawan pada saat x mendekati 2.

10. Jika fungsi $f(x) - 2f\left(\frac{2013}{2} - x\right) = x$ maka $\lim_{x \to 2013} \left(\frac{3f(x)}{x - 2013}\right)$

Projek

Himpun informasi penerapan limit fungsi dalam bidang teknik, masalah nyata, fisika, dan teknologi informasi. Rancanglah minimal dua masalah terkait informasi yang kamu peroleh dan buatlah pemecahannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu, dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c, sangat bergantung pada kedudukan titik c dan daerah asal fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi daerah asal fungsi adalah himpunan bilangan real di mana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi f mempunyai limit di titik c, apabila limit kiri sama dengan limit kanan fungsi di titik c.
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c. Titik c tidak harus anggota daerah asal fungsi, tetapi c bilangan real.
5 Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

6. Misalkan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

   a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$

   b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

   c. $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]$

   d. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] + \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$

   e. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] - \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$

   f. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \times g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x \to c} g(x)\right]$

   g. $\lim\limits_{x \to c} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}\right]$ dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

h. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

i. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

7. Selanjutnya kita akan membahas tentang materi statistika. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan, dan pengukuran. Hal ini sangat berguna dalam penentuan nilai rata-rata, median, modus, quartil, standar deviasi, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, kamu harus menguasai tentang fungsi, limit fungsi, dan fungsi yang kontinu sebagai prasyarat untuk mempelajari statistik. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.